Travaux dirigés de Mathématiques

3ème année

Année 2024-2025

Arnaud LE PADELLEC alepadellec@irap.omp.eu

Présentation

Tous les exercices de statistique qui seront abordés en Travaux Dirigés cette année sont regroupés dans ce fascicule. Il est demandé aux étudiants de préparer la séance de travaux dirigés.

Thème : éléments de statistique

<u>Ex. 1 :</u> ***statistique à une variable***

Un élève a obtenu les notes suivantes : 4 ; 6 ; 3 ; 9 ; 10 ; 8 ; 12 ; 10 ; 19 ; 12 ; 20 ; 12 ; 18. Calculer sa moyenne.

<u>Ex. 2 :</u> ***'ajustement de moyennes'***

Après correction des copies, la moyenne à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat est $\overline{x}$ = 8,4.

1. Si le ministre de l'Education Nationale décide d'augmenter la note de chaque copie de 1,6 point, quelle sera la nouvelle moyenne nationale ?
2. Si le ministre de l'Education Nationale décide d'augmenter la note de chaque copie de 10 %, quelle sera la nouvelle moyenne nationale ?

<u>Ex. 3 :</u> ***comparaison de températures***

Le tableau suivant donne les températures moyennes par mois à Paris et à Pékin en °C.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Pékin	–5	–4	4	15	27	31	31	30	26	20	10	–5
Paris	3	4	7	10	14	17	19	18	16	17	7	6

1. Calculer la moyenne, l'étendue, la variance et l'écart-type des températures mensuelles pour chacune de ces villes.
2. Comparer et analyser les résultats obtenus.

<u>Ex. 4 :</u> ***loi normale***

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement si, pour tout x réel $p(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$. On admet que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}dr$vaut $\sqrt{\pi}$.

1. Calculer $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$ ainsi que $Var(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(t - E(X))^2e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$ de cette loi.
2. Si k est un réel fixé quelconque, montrer que $Y = X / k$ suit une loi normale de paramètres μ / k et σ^2/k^2.

<u>Ex. 5 :</u> ***'sachets de graines'***

Un producteur de graines vient de lancer une variété de fleur. Il garantit (sur 1 an) que seules 2 graines sur 10 ne germent pas. Chaque sachet mis en vente contient 200 graines.

1. Indiquez combien de fleurs peut donner en moyenne un sachet de graines.
2. Quel est l'écart type associé ?
3. Pour obtenir un massif de 500 fleurs, combien de sachets faut-il acheter en moyenne ?

<u>Ex. 6 :</u> ***'contrôle avant mise sur marché'***

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat qui doivent peser 100 g, avec une tolérance de plus ou moins deux grammes. Elles sont donc mises sur le marché si leur masse est comprise entre 98 et 102 g et qui est modélisée par une variable aléatoire X d'une loi normale d'espérance m = 100 et d'écart-type σ= 1. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement M'la tablette est mise sur le marché'.
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement 'la tablette est mise sur le marché' soit égale à 0,97.

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

<u>Ex. 7 :</u> *'ours des Pyrénées'*

Un écologiste étudie le passage des ours (récemment introduits) en un point précis d'une rivière séparant un champ d'une petite forêt des Pyrénées. A l'issue d'un travail long et rigoureux de plusieurs semaines, il observe en moyenne 4 individus par jour.

1. Quelle est la probabilité qu'il détecte précisément 3 ours en l'espace de 12 h ?
2. Quelle est la probabilité qu'il détecte entre 1 et 3 ours en 6 heures ?

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038

<u>Ex. 8 :</u> *loi théorique binomiale*

On s'intéresse à la distribution du nombre de filles dans 160 familles de 4 enfants tirées au hasard dans une population (voir tableau ci-dessous).

Famille de x_i filles	Nombre de familles n_i
0	16
1	48
2	62
3	30
4	4

Calculer les termes respectifs de la distribution binomiale théorique correspondante (ayant le même effectif N que la distribution expérimentale observée), cad les probabilités P_k et les fréquences absolues n_k telles que :

$$P_k = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k} \qquad \text{avec} \quad \sum P_k = 1,$$

$$n_k = N\,P_k \qquad \text{avec} \quad \sum n_k = N.$$

Ex. 9 : ***loi théorique de Poisson***

On s'intéresse à la distribution du nombre d'accidents hebdomadaires à un carrefour dangereux.

Nombre d'accidents x_i	Nombre de semaines n_i
0	5
1	10
2	7
3	4
4	3
5	1

Question identique à l'exercice 8, cad les probabilités P_k et les fréquences absolues n_k telles que :

$$\text{avec} \quad \sum P_k = 1,$$

$$n_k = N\,P_k \qquad \text{avec} \quad \sum n_k = N.$$

Ex. 10 : ***'vérification du non-truquage d'un dé'***

Le lancement d'un dé, $N = 600$ fois de suite, a donné les résultats suivants :

Numéro tiré i	1	2	3	4	5	6
Effectifs empiriques Np_{emp}	88	109	107	94	105	97

La statistique du χ^2 étant donnée par $T = \sum_{i=1}^{6} \frac{\left(Np_{emp} - Np_{th}\right)^2}{Np_{th}}$, déterminer si le dé est truqué ou non.

Degrees of Freedom	Probability of a larger value of x ²								
	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.63	9.24	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.84	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.04	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09

9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38

Ex 11 : *χ^2 et loi de Poisson*

Une chaine d'agences immobilières cherche à vérifier que le nombre de biens vendus par agent par mois suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,5$.

1. On observe 52 agents pendant un mois dans la moitié nord de la France. On trouve la répartition suivante : 18 agents n'ont rien vendu, 18 agents ont vendu 1 bien, 8 agents ont vendu 2 biens, 5 agents ont vendu 3 biens, 2 agents ont vendus 4 biens, et un agent a vendu 5 biens. Avec un test du χ^2, chercher s'il s'agit bien de la loi de Poisson attendue.
2. Répondre à la même question avec les 52 agents dans la moitié sud de la France : 19 agents n'ont rien vendu, 20 agents ont vendu un bien, 7 agents 2 biens, 5 agents 3 biens et 1 agent 6 biens.

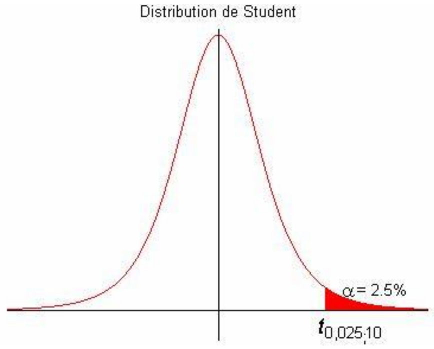
Ex 12 : *χ^2*

Dans une agence de location de voitures, le patron veut savoir quelles sont les voitures qui n'ont roulé qu'en ville pour les revendre immédiatement. Pour cela, il y a dans chaque voiture une boite noire qui enregistre le nombre d'heures pendant lesquelles la voiture est restée au point mort, au premier rapport, au deuxième rapport, ..., au cinquième rapport. On sait qu'une voiture qui ne roule qu'en ville passe en moyenne 10% de son temps au point mort, 5% en première, 30% en seconde, 30% en troisième, 20% en quatrième, et 5% en cinquième. On décide de faire un test du χ^2 pour savoir si une voiture n'a roulé qu'en ville ou non.

1. Sur une première voiture, on constate sur 2000 heures de conduite : 210 h au point mort, 94 h en première, 564 h en seconde, 630 h en troisième, 390 h en quatrième, et 112 h en cinquième. Cette voiture n'a-t-elle fait que rester en ville ?
2. Avec une autre voiture, on obtient les données suivantes : 220 h au point mort, 80 h en première, 340 h en seconde, 600 h en troisième, 480 h en quatrième et 280 h en cinquième.

Ex. 13 : *Loi de Student*

Trouver la valeur théorique d'une variable aléatoire T suivant une loi de Student telle que son degré de liberté ν soit de 10 et telle que 2,5 % des valeurs lui sont supérieures (figure et extrait de table ci-dessous).



ν \ α	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587

<u>Ex. 14 :</u> *tests non paramétriques / 'effet d'un traitement - comparaison de deux moyennes'*

Plusieurs sujets sont choisis au hasard dans une population et, parmi ceux-ci, certains sont tirés au sort pour recevoir un traitement (Groupe A), les autres devant servir de témoins (Groupe B). Le traitement est censé modifier le résultat d'un dosage biologique. Les résultats, exprimés en mg/l, sont les suivants :

Groupe A	6,50	5,50	8,00	7,00	6,00		
Groupe B	7,00	8,50	8,00	7,50	9,00	7,20	8,20

1. Quel test choisir ?
2. Préciser les hypothèses (H_0) et (H_1).
3. Rappeler, éventuellement, les conditions d'application du test utilisé.
4. Peut-on admettre (α = 5%), que le traitement modifie le paramètre biologique (voir table) ?

Test de Wilcoxon : extrait de table pour N_1 = 5 et N_2 = 7.

$N_1 = 5$ $N_2 = 7$	792	Seuil unilatéral à 2,5 % (par interpolation linéaire) **20.08**
W_1	Nombre de Combinaisons	Fonction de Répartition
15	1	$1,26 \times 10^{-3}$
16	1	$2,53 \times 10^{-3}$
17	2	$5,05 \times 10^{-3}$
18	3	$8,84 \times 10^{-3}$
19	5	$1,52 \times 10^{-2}$
20	7	$2,40 \times 10^{-2}$

<u>Ex 15 :</u> *test non paramétrique de Wilcoxon*

Le tableau suivant donne une mesure de l'état de dépression d'un groupe de 10 patients, avant et après 3 mois de traitement :

AVANT : X	296	376	309	222	150	316	321	447	220	375
APRÈS : Y	175	329	238	60	271	291	364	402	70	335
Diff	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Décider, à l'aide d'un test non paramétrique de comparaison au risque d'erreur 5%, si les résultats sont significativement différents avant et après traitement.

<u>Ex. 16 :</u> *calcul de r_p*

Supposons un échantillon aléatoire de 4 firmes pharmaceutiques avec des dépenses de recherche X et des profits Y (*en millions de dollars*) :

X	Y
40	50
40	60
30	40
50	50

Calculer le coefficient de corrélation.